



Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzell

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 14 - LÖSUNG

WS 2021/22
8. Februar 2022

Aufgabe 1 (10 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen 0, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = 1.$$

Bemerkung: Der Satz zur Vertauschung von Integral und Grenzwert bei gleichmäßiger Konvergenz ist also nicht auf uneigentliche Riemann-Integrale anwendbar.

Lösung. Für alle $x \in [0, \infty[$ gilt $e^x \geq 1 + x$, also $e^{-x} \leq (1 + x)^{-1}$. Somit ist für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \leq \frac{x}{n^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\frac{n}{x} + 1} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

Zudem ist $f_n(0) = 0$. Es folgt

$$\sup_{x \in [0, \infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

was gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 beweist.

(ii) Sei $R > 0$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^R f_n(x) dx &= \frac{1}{n^2} \int_0^R x e^{-\frac{x}{n}} dx \\ &= \frac{1}{n^2} \left(-n x e^{-\frac{x}{n}} \Big|_{x=0}^R + n \int_0^R e^{-\frac{x}{n}} dx \right) \\ &= -\frac{R}{n} e^{-\frac{R}{n}} - n e^{-\frac{x}{n}} \Big|_{x=0}^R = -\frac{R}{n} e^{-\frac{R}{n}} - e^{-\frac{R}{n}} + 1 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -0 - 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f_n(x) dx = 1,$$

also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = 1.$$

Alternativ kann man auch über die Gammafunktion argumentieren. □

Aufgabe 2 (10 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{n^4}}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Betragsfunktion $|\cdot|$ konvergiert.
- (ii) Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Lösung. (i) Für $a, b > 0$ haben wir folgende Identität:

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b),$$

also

$$(a - b) = \frac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2)(a + b)}.$$

Angewandt auf unsere Situation ergibt sich

$$\left| \sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{n^4}} - |x| \right| = \frac{\left| x^4 + \frac{1}{n^4} - |x|^4 \right|}{\left(\sqrt{x^4 + \frac{1}{n^4}} + |x|^2 \right) \left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{n^4}} + |x| \right)} \leq \frac{1}{n^4} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^4}} \sqrt[4]{\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{n}.$$

Es folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{n^4}} - |x| \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also die gewünschte gleichmäßige Konvergenz.

(ii) Wegen der in (i) gezeigten gleichmäßigen Konvergenz können wir gemäß einem Satz der Vorlesung den Grenzwert und das Integral vertauschen. Wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 |x| dx = \frac{1}{2}.$$

□

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle $x \in]-1, 1[$ gilt:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, die geometrische Reihe und den Satz zur Vertauschung von Grenzwert und Integral.

Lösung. Sei $x \in]0, 1[$. Den Fall $x \in]-1, 0[$ behandelt man komplett analog zu dem folgenden Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\arctan x = \arctan x - \arctan(0) = \int_0^x \arctan'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$. Da $|x| < 1$, konvergiert sie nach Vorlesung auf $\{t \in \mathbb{R} : |t| \leq x\}$ absolut und gleichmäßig. Es lässt sich also der Satz zur Vertauschung von Grenzwert und Integral anwenden und wir erhalten

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Gleichheit auch gültig bleibt für $x = 1$ und $x = -1$. Das folgt aber nicht aus dem obigen Argument (Warum?). $\square$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}},$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} b^{n^2} z^n \quad \text{für } b \in \mathbb{C},$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n = \begin{cases} a^n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ b^n & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{C}.$

Lösung. (i) Mit Induktion kann man leicht folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen:

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}.$$

Es folgt

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n/4},$$

also ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n!}} \right|^{1/n} = 0.$$

Aus der Formel für den Konvergenzradius erhalten wir $R = \infty$.

(ii) Aus der Formel für den Konvergenzradius folgt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |b|^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |b| > 1, \\ 1 & \text{für } |b| = 1, \\ \infty & \text{für } |b| < 1. \end{cases}$$

(iii) Es ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{|a|, |b|\}$, also

$$R = \min \left\{ \frac{1}{|a|}, \frac{1}{|b|} \right\}.$$

$\square$